Geometría Moderna I

Prof. Rodolfo San Agustín Chi.
Ay. Anatolio Hernández Quintero.

El profesor podrá indicar la puerta del conocimiento, pero es el alumno el que debe entrar por sí mismo.

Ejercicios

1. Introducción.

1. Probar que la mediatriz de un segmento AB ($A \neq B$) es el *lugar equidistante* de A y B. Esto es, se trata del lugar geométrico siguiente:

$$\{X | AX \equiv BX\}$$

2. Probar el recíproco de *Pons asinorum*: En un triángulo cualquiera los lados opuestos a ángulos congruentes son congruentes.

3. Probar el recíproco del teorema de Pitágoras: En un triángulo de lados a, b y c, si

$$a^2 + b^2 = c^2$$

entonces, el ángulo opuesto al lado c es un ángulo recto.

4. Probar que: En la figura (1),

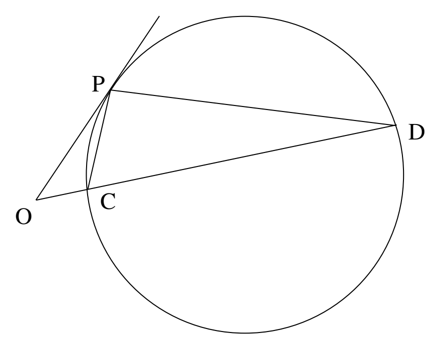


Figura 1: OP es tangente a la circunferencia.

si OP es tangente a la circunferencia, entonces,

$$\angle OPC \equiv \angle PDC.$$

5. A partir de la ley de los senos, demostrar el teorema de la bisectriz:

   Si la bisectriz del ángulo BAC corta en un punto L a la recta BC, entonces

$$\frac{BL}{LC} = \frac{BA}{AC}.$$

6. Las rectas de dos haces con vértices diferentes están en correspondencia biunívoca de tal manera que las intersecciones de rectas correspondientes son colineales. Encontrar un par de rectas perpendiculares en el primero, para el cual las rectas correspondientes en el otro, sean también perpendiculares.

7. Demostrar que, si A, B, P y M son puntos colineales tales que $AM = MB$, entonces

$$PM = \frac{PA + PB}{2}.$$

8. Prueba el teorema de Stewart:

   Si A, B y C son tres puntos colineales y D es cualquier cuarto punto, entonces

$$DA^2 \cdot BC + DB^2 \cdot CA + DC^2 \cdot AB + AB \cdot BC \cdot CA = 0.$$

   Sugerencia. Considera primero el caso en que D está en la misma recta. Después dibuja una perpendicular desde D a la recta.

9. Si A, B y C son puntos colineales y si P, Q y R son los puntos medios de BC, CA y AB respectivamente, demuestra que el punto medio de CR coincide con el de PQ.

10. Haz una construcción geométrica para los puntos que dividen a un segmento de recta dado en las razones $\frac{a}{b}$ y $-\frac{a}{b}$ (a y b positivos).

2. Semejanza.

1. Si dos pares de lados correspondientes de un triángulo rectángulo son proporcionales, entonces los triángulo son semejantes.

2. Si cuatro o más triángulos directamente semejantes son colocados de tal forma que un conjunto de vértices correspondientes coincidan y un segundo conjunto sea concíclico, el tercer conjunto es también concíclico.

3. Supón que A, B, C y D son los vértices de un cuadrilátero inscrito a una circunferencia. Demuestra que si DB es un diámetro, $\measuredangle BDA = x$ y $\measuredangle CDB = y$, entonces

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

4. Construye un cuadrilátero cíclico dados sus cuatro lados.

5. Haciendo uso del Teorema de Ptolomeo encuentra la razón de la diagonal de un pentágono regular a su lado. Con ayuda de esta razón, demuestra que

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

6. Usando el resultado anterior, inscribe un pentágono regular en una circunferencia dada y prueba que la razón de sus lados al radio es

$$\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

7. Si dos circunferencias se intersectan, las rectas del punto de intersección a los centros de similitud bisectan los ángulos formados por los radios trazados a ese punto.

8. La bisectriz del ángulo en A del triángulo ABC corta a BC en L.

   Si C describe una circunferencia cuyo centro es A y B permanece fijo, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos L?

9. La distancia entre los centros de dos circunferencias, cuyos radios son a y b, es c. Encuentra el centro de la circunferencia de similitud.

10. Dos circunferencias se intersectan en los puntos A y B. Una recta variable por A intersecta a las circunferencias en P y Q. Si R divide al segmento PQ en una razón dada, demuestra que el lugar geométrico de los puntos R es una circunferencia.

11. Encontrar un punto tal que sus distancias a tres puntos dados tengan razones dadas. Discutir ampliamente el número de soluciones.

12. Construir un rectángulo semejante a un rectángulo dado teniendo la suma de un lado y una diagonal.

13. Dos rectas dadas se intersectan en un punto inaccesible A.

    Se requiere: por un punto P trazar la recta PA.

14. Construir un triángulo que es semejante a un triángulo dado y cuyos vértices estén en tres rectas paralelas dadas.

15. Construir un triángulo teniendo un lado, el ángulo opuesto a dicho lado y la razón de los otros dos lados.

16. Construye un triángulo teniendo un ángulo, la suma de los dos lados componentes de dicho ángulo y la suma de otro par de lados.

3. Teoremas de colinealidad y concurrencia.

1. Demuestra, utilizando el Teorema de Ceva o el de Menelao que en cualquier triángulo las alturas son concurrentes.

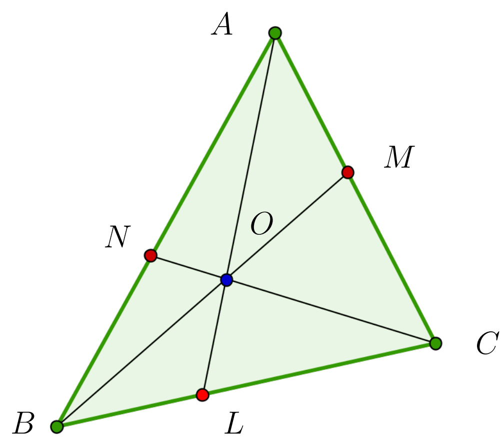
2. Los seis centros de similitud de tres circunferencias, tomadas por parejas, están por tercias en cuatro líneas rectas.

3. Dadas dos rectas paralelas y el segmento AB en una de ellas encuentra el punto medio de AB, usando únicamente regla.

4. Supongamos que las transversales PQR y $P'Q'R'$ cortan a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean $X := BC \cdot QR'$, $Y := CA \cdot RP'$ y $Z := AB \cdot PQ'$. Entonces los puntos X, Y y Z están alineados.

5. En la figura, demuestra que

$$\frac{OL}{AL} + \frac{OM}{BM} + \frac{ON}{CN} = 1.$$



6. Si P es el punto medio del lado BC del triágulo ABC, y Q y R son puntos cualesquiera en AC y AB de tal forma que BQ y CR se cortan en AP, entonces la recta QR es paralela a BC.

7. Si una circunferencia corta a los lados BC, CA y AB del triángulo ABC en los puntos P, P'; Q, Q'; R, R', respectivamente, y si AP, BQ y CR son concurrentes, entonces AP', BQ' y CR' también son concurrentes.

8. Sean L, M y N los puntos medios de los lados BC, CA y AB del triángulo ABC, y sean D, E y F tres puntos cualesquiera en estos lados para los cuales AD, BE y CF son concurrentes. Si P, Q y R son los puntos medios de AD, BE y CF respectivamente, demuestra que PL, QM, RN son concurrentes.

9. Si en el ejercicio anterior, X, Y y Z son los puntos medios de EF, FD y DE respectivamente, demuestra que AX, BY y CZ son concurrentes y también que LX, MY y NZ son concurrentes.

10. Refiere la solución del problema siguiente al Teorema de Desargues: Dadas dos rectas y un punto que no se encuentra en ninguna de ellas, con regla solamente, traza una recta a través del punto dado y del punto de intersección de las dos rectas dadas, sin usar este punto de intersección.

11. Si tres triángulos tienen un centro común de perspectiva, los tres ejes de perspectiva son concurrentes.

12. Si tres triángulos tienen un eje común de perspectiva, los tres centros de perspectiva están alineados. Ver la figura (2).

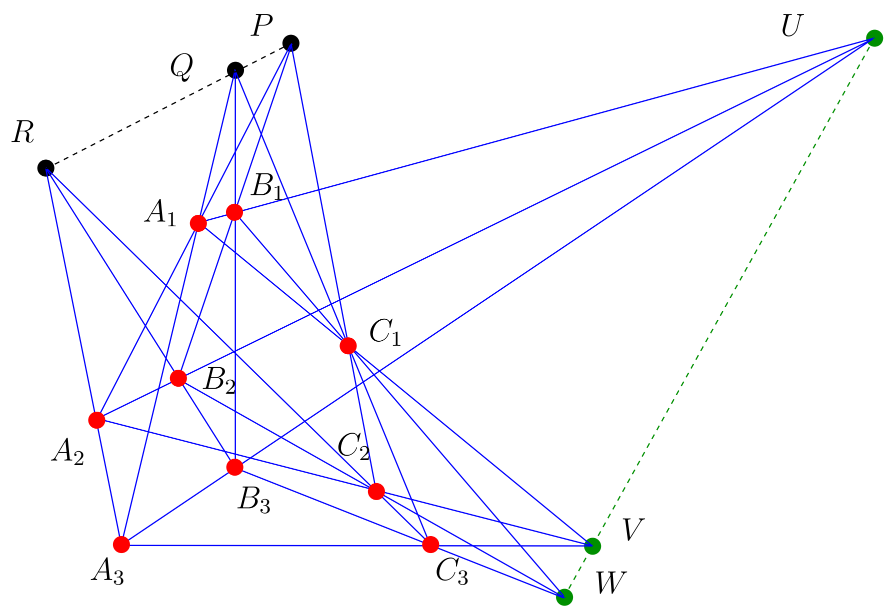


Figura 2: U, V y W están alineados si y solo si P, Q y R lo están.

13. Si las rectas AA', BB' y CC' son concurrentes, los seis puntos de intersección de los pares de rectas AB, $A'B'$; BC, $B'C'$; CA, $C'A'$; $A'B$, AB'; $B'C$, BC' y $C'A$, CA' se encuentran por tercias en cuatro rectas.

14. Demuestra que siempre es posible trazar un triángulo que esté en perspectiva con un triángulo dado y que sea semejante a otro triángulo también dado.

15. Demuestra que el teorema de Papus implica el teorema de Desargues.

4. Relaciones armónicas.

1. La bisectriz del ángulo en A del triángulo ABC corta al lado opuesto en P. Q y R son los pies de las perpendiculares desde B y C sobre AP. Demuestra que los cuatro puntos A, P, Q, R son armónicos.

2. O es un punto cualquiera de la altura AD del triángulo ABC. BO y CO intersctan a AC y AB en E y F respectivamente. Prueba que el ángulo EDF está bisectado por DA.

3. A, B, C, D son cuatro puntos en una línea recta. Encuentra dos puntos que sean conjugados armónicos con respecto a A y B así como con respecto a C y D. Elabora una discusión completa de los casos.

4. P y Q son los centros de dos circunferencias que tienen tangentes exteriores comunes que se intersectan en R y tangentes interiores comunes que se intersctan en S. Demuestra que existen circunferencias con centros R y S cuyas tangentes comunes exteriores se intersectan en P y cuyas tangentes comunes interiores se intersectan en Q.

5. Las tangentes a una circunferencia en P y Q se intersectan en A y la recta de diámetro BC pasa por A. Demuestra que A y Q están separados armónicamente por los puntos en los cuales su recta es intersectada por PB y PC.

6. Construye un cuadrilátero completo que tenga un triángulo diagonal dado. ¿Se puede dibujar más de uno de estos cuadriláteros?

7. ¿Pueden ser colineales los puntos diagonales de un cuadrángulo completo?

8. Demuestra que los puntos medios de las diagonales de un cuadrilátero completo son colineales.

   Sugerencia. En la Figura 3: P, R y Q son los puntos medios de las diagonales AB, CD y EF, respectivamente. Sean L, M y N los puntos medios de los lados del triángulo CEB. Demuestra que M, N y P son colineales, así como M, L, Q y N, L, R.

   Demuestra que $\dfrac{MP}{PN} = \dfrac{EA}{AC}$, etcétera, y que A, F y D son puntos colineales del triángulo ECB. Usa el Teorema de Menelao.

9. Si dos cuadrángulos completos están en tal forma que los puntos de intersección de cinco pares de lados correspondientes están en una recta, entonces el punto en el cual el sexto par de lados se intersecta, también está en esa recta y las cuatro rectas que unen vértices correspondientes son concurrentes.

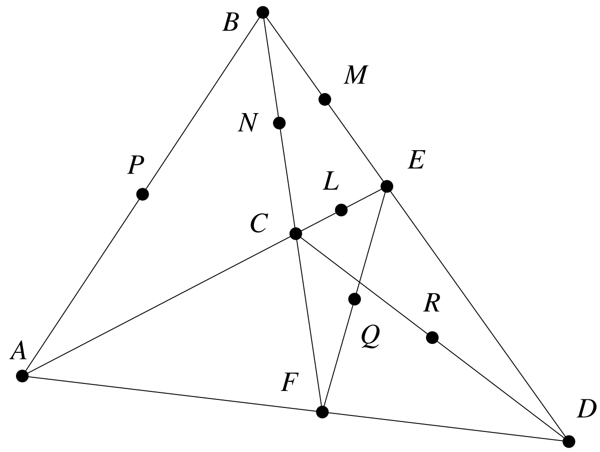


Figura 3:

10. Cada uno de los triángulos cuyos lados son tres de las cuatro rectas de un cuadrilátero completo, está en perspectiva con el triángulo diagonal del cuadrilátero.

11. Los vértices de un cuadrángulo completo son los tres vértices de un triángulo y el punto de intersección de sus medianas. Construye su triángulo diagonal. También construye un cuadrilátero completo que tenga el mismo triángulo diagonal.

5. La circunferencia de los nueve puntos y la recta de Simson.

1. En un triángulo cualquiera, el producto de los dos segmentos en que el ortocentro divide a la altura es el mismo para las tres alturas.

2. Las seis circunferencias cuyos diámetros son los segmentos que unen por pares los puntos de un grupo ortocéntrico de puntos pasan de cuatro en cuatro por tres puntos.

3. Identifíquese el triángulo diagonal de un cuadrángulo ortocéntrico.

4. Las rectas que van de los vértices de un triángulo a los puntos de contacto de las circunferencias excritas con los lados opuestos son concurrentes. El punto de concurrencia es *el punto de Nagel* del triángulo.

5. Con la nomenclatura del texto, demuéstrese que los segmentos PO y AL se bisecan.

6. En la figura 4, demuestre que los puntos O_2, P y O_3 están alineados.

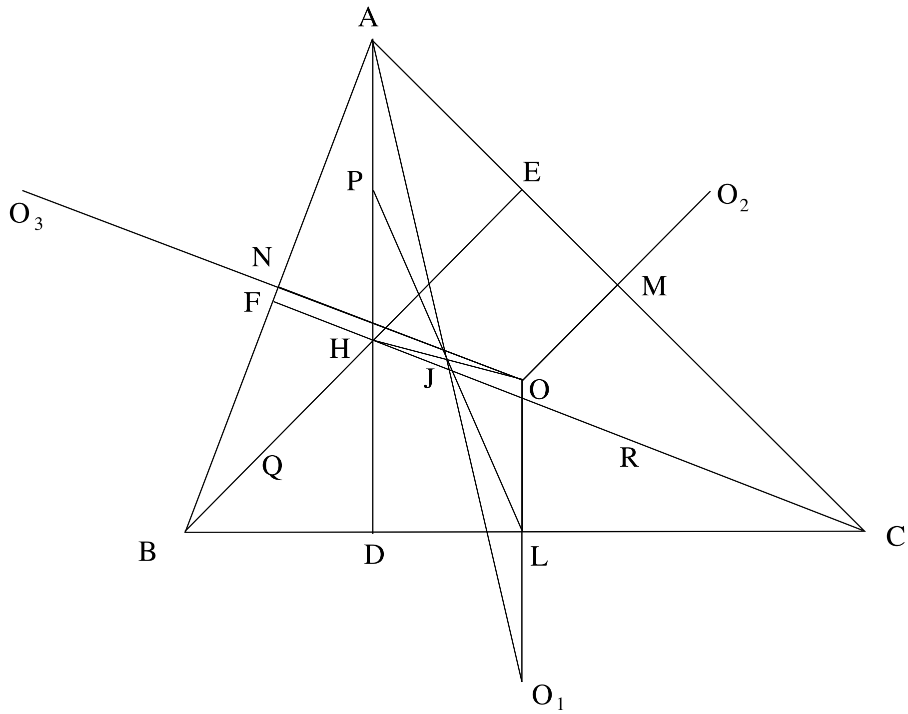


Figura 4: Los puntos O_2, P y O_3 están alineados.

7. Demuestre que los centroides de un grupo ortocéntrico de triángulos forman un grupo ortocéntrico.

8. El circuncírculo biseca a los seis segmentos de recta que unen por pares el incentro y los tres excentros

9. Construir un triángulo dados los pies de sus alturas.

10. Si dos triángulos están inscritos en una misma circunferencia, las rectas de Simson de cualquier punto de la circunferencia, con respecto de esos dos triángulos, se intersectan a un ángulo constante.

11. Construir un triángulo dados su circuncírculo, su ortocentro y uno de sus vértices.

12. Las rectas de Simson de tres puntos con respecto a un triángulo dado forman un triángulo semejante al triángulo formado por los tres puntos.

Referencias

[AC07] N. Altshiller Court, *College geometry: An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*, Dover Publishing Inc., 2007.

[BMGO02a] R. Bulajich Manfrino and J.A. Gómez Ortega, *Geometría*, Cuadernos de olimpiadas de matemáticas, Instituto de matemáticas, 2002.

[BMGO02b] ______, *Geometría. ejercicios y problemas*, Cuadernos de olimpiadas de matemáticas, Instituto de matemáticas, 2002.

[Cro97] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997.

[Euc92] Euclides, *Elementos de geometría*, Bibliotheca Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana, vol. I and II, U.N.A.M., 1992.

[Eve69] H. Eves, *Estudio de las geometrias*, vol. 1, UTEHA, 1969.

[Hea] T.L. Heath, *The thirteen books of euclid's elements*, Dover Publications.

[Hil71] D. Hilbert, *Foundations of geometry*, Open Court Classics, vol. P 72, Open Court, 1971.

[JR07] A. Johnson Roger, *Advanced euclidean geometry*, Dover Publishing Inc., 2007.

[LMdlESA77] G. Lucio, N. Martínez de la Escalera, and R. San Agustín, *Algo de geometría*, Notas de Clase, vol. 155, Facultad de Ciencias, UNAM., 1977.

[Shi61] Levy S. Shively, *Introducción a la geometría moderna*, C.E.C.S.A., 1961.